

材料力学2

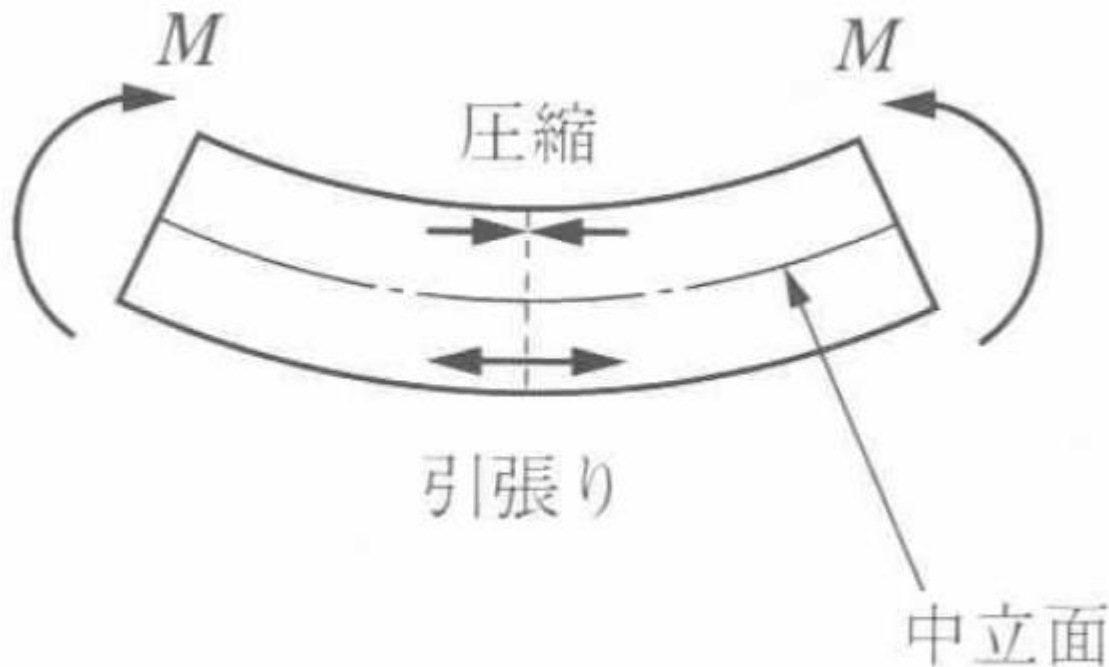
2H後期 選択

6. はりに生じる応力

2012年度 担当:新関雅俊

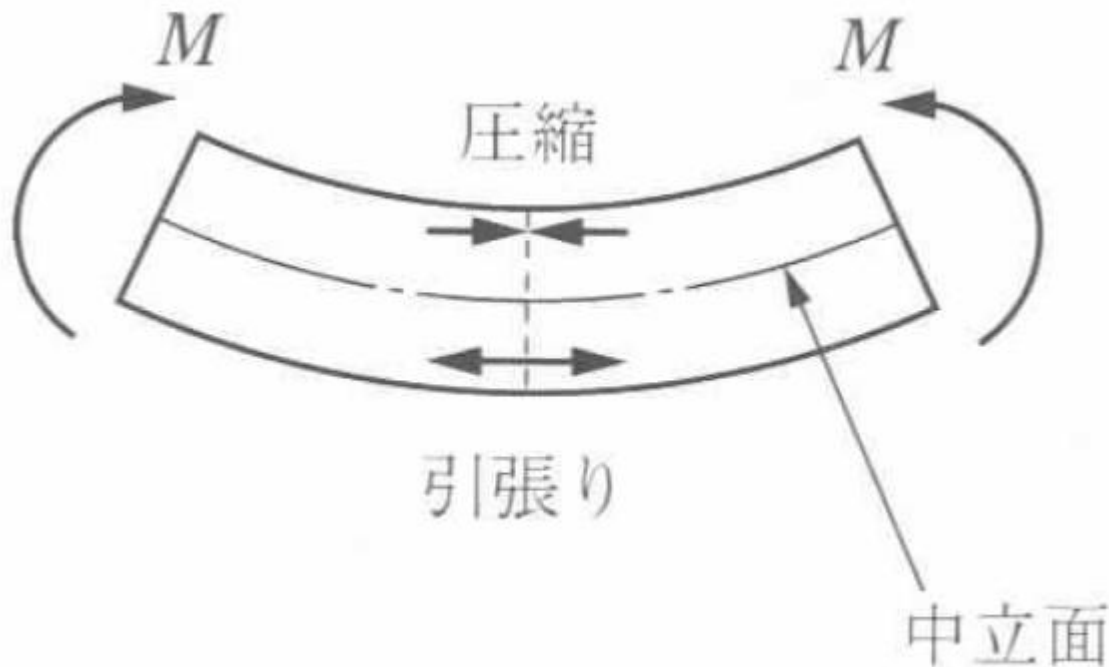
6.1 曲げによる応力 (1)

- はりにモーメントが作用しているとする。
 - はりは曲がり、図に示すように凸側は引っ張られ、凹側は圧縮される。



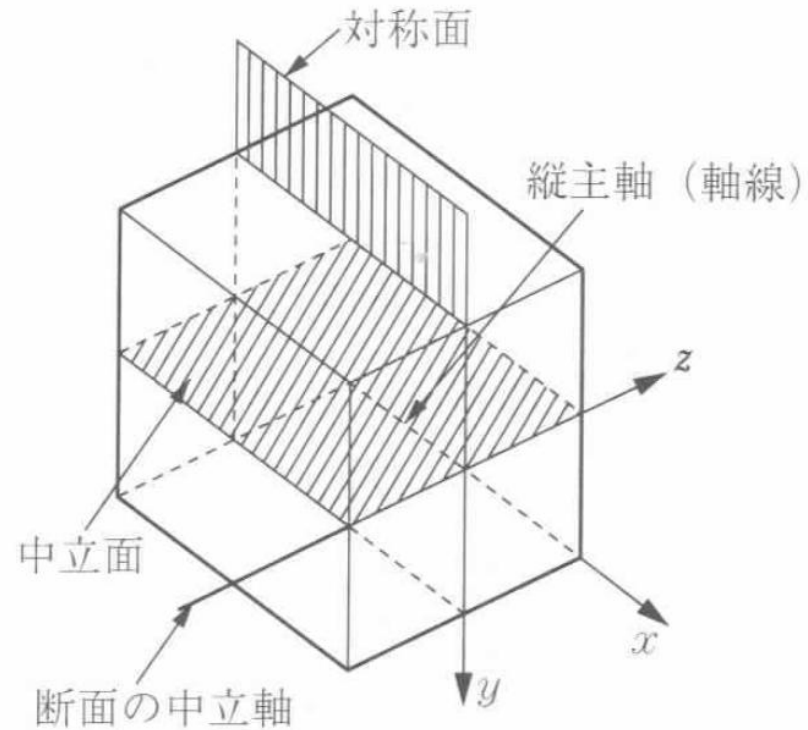
6.1 曲げによる応力 (2)

- はりの中央には伸縮しない面が存在する。
 - この面を中立面 (neutral plane) という。



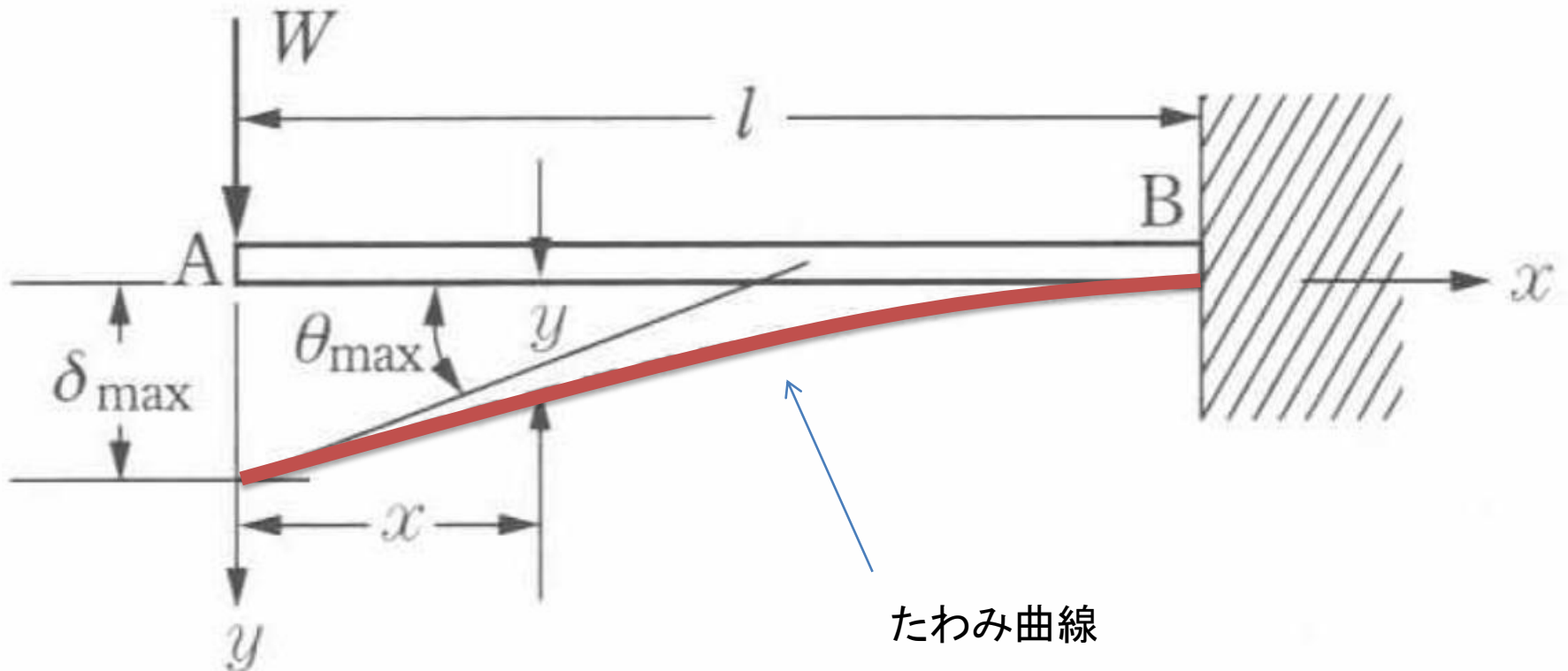
中立面と縦主軸

- 中立面とはりの横断面との交線を断面の中立軸 (neutral axis) という。
- 中立面と図心を通るx-y平面の交線を縦主軸 (longitudinal principal axis: 軸線) という。



たわみ曲線

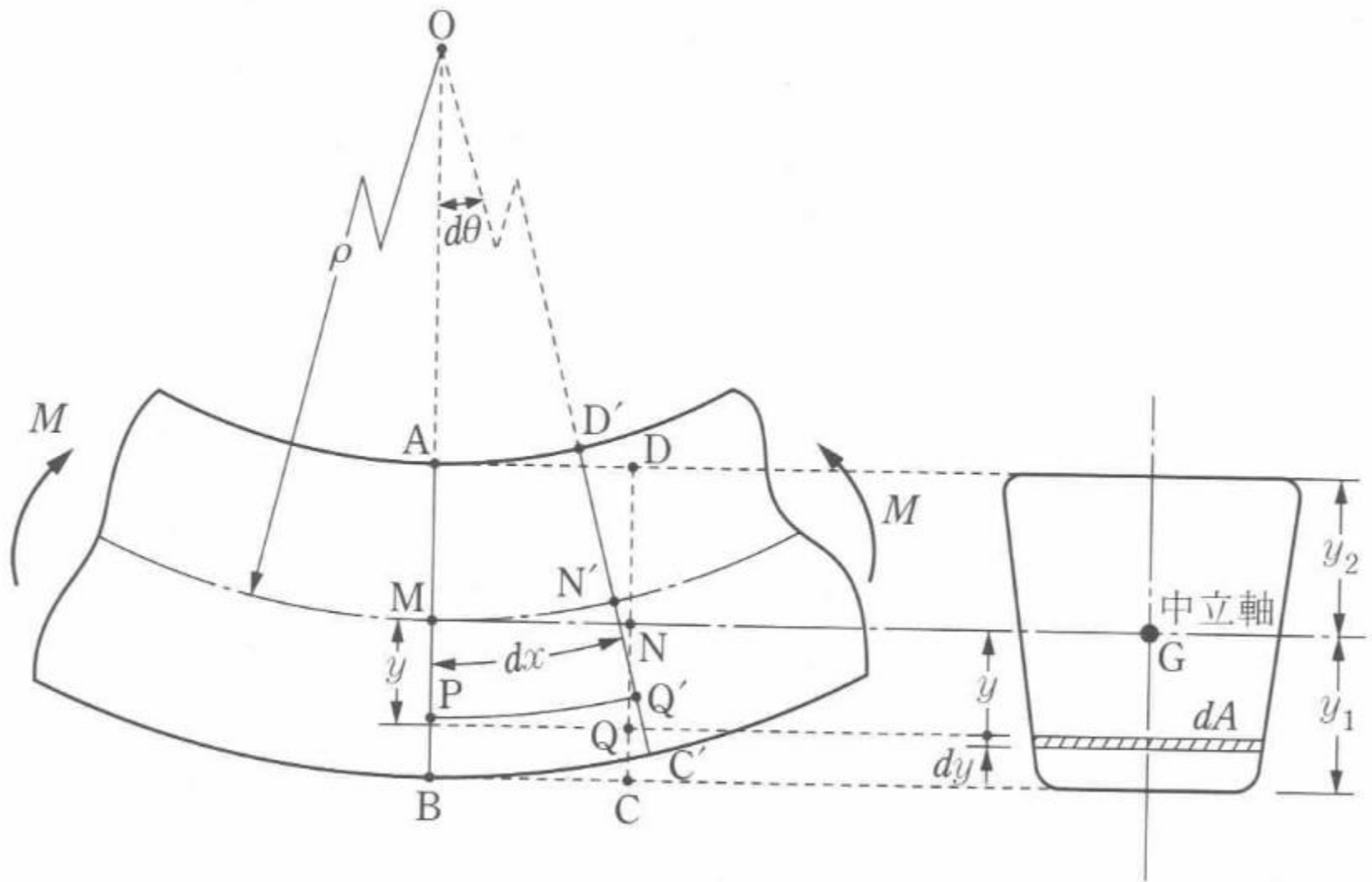
- はりの縦主軸のつくる曲線をたわみ曲線 (deflection curve) という。



横断面に生じる垂直応力

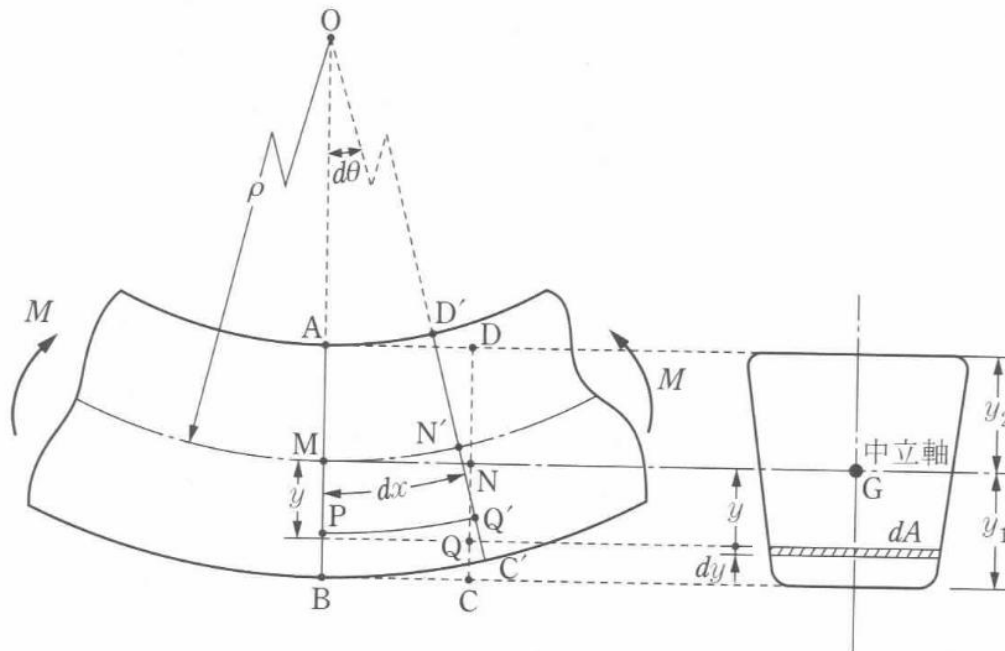
- はりに一様な曲げモーメントが作用していると
する(単純曲げ)。
 - 横断面に生じる垂直応力を求める。
 - このとき、変形前にはりの軸線に垂直な横断面
は、変形後も平面を保っていると考え、かつ変形
後の軸線に垂直であると仮定する。

モーメントによるはりの変形



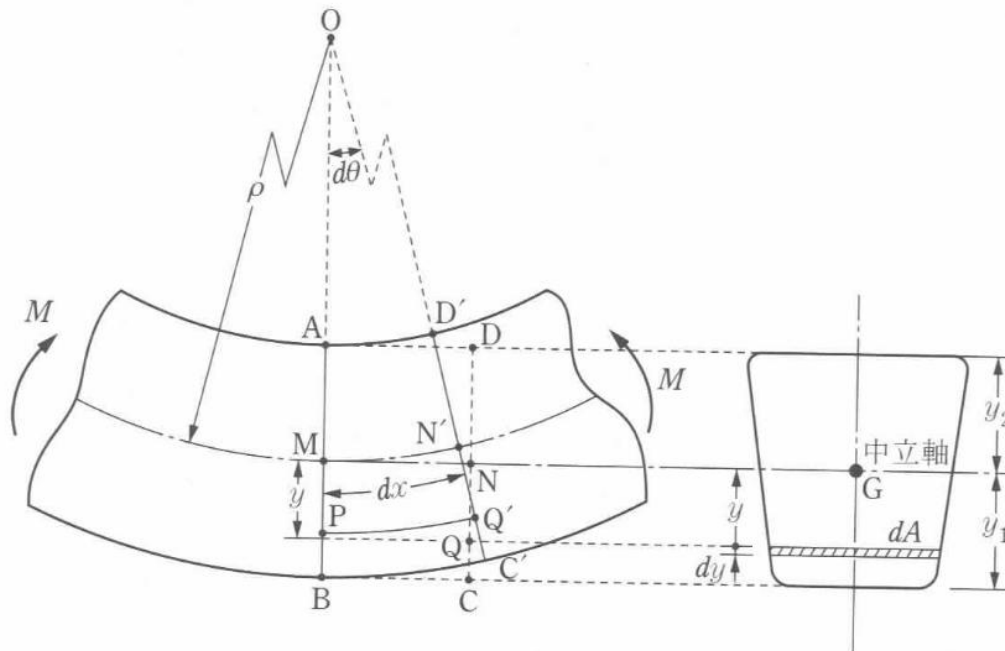
モーメントによるはりの変形

- 図に示すように変形前に dx だけ離れた2つの断面 A-B と C-D は変形後に軸線の湾曲とともに傾き、凸側の B-C は引っ張られ、凹側の A-D は圧縮される。



モーメントによるはりの変形

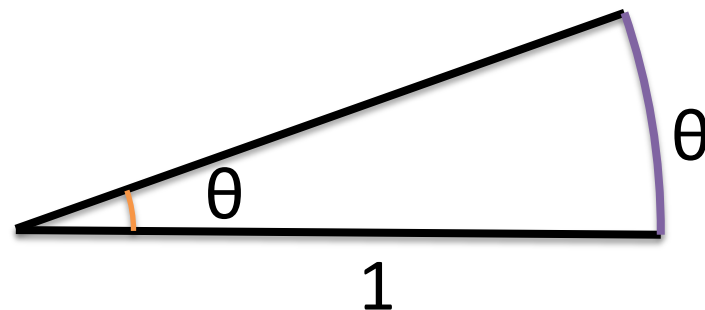
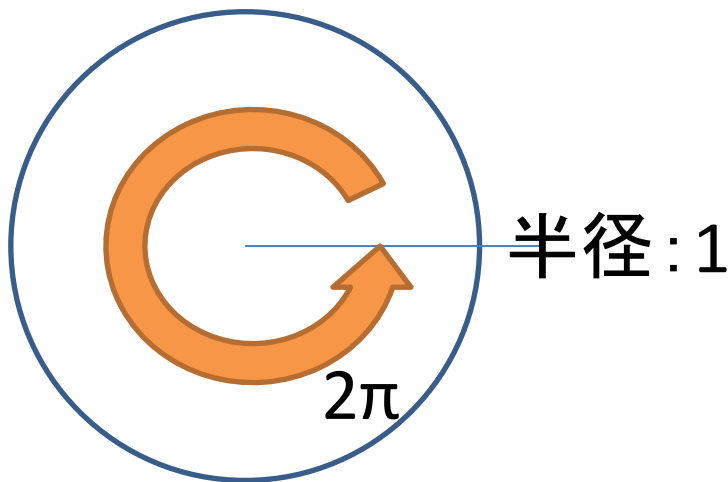
- 断面 A-B と C'-D' の延長線が点 O において角 $d\theta$ で交わるとすればはりのたわみ曲線の曲率半径 (radius of curvature) を ρ として、 $\rho d\theta = ds$ となる。



角度と弧の長さの関係

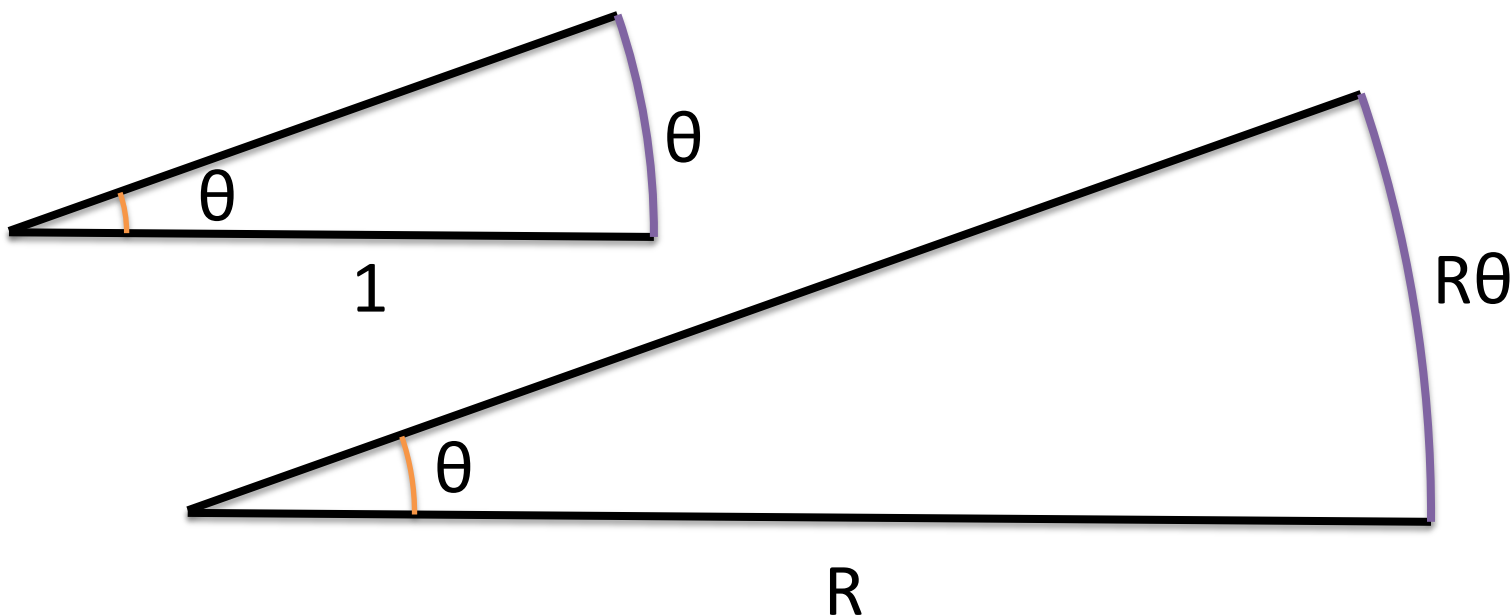
- 半径1の円を考える
 - 角度と弧の長さが同じ

1周の長さ: 2π



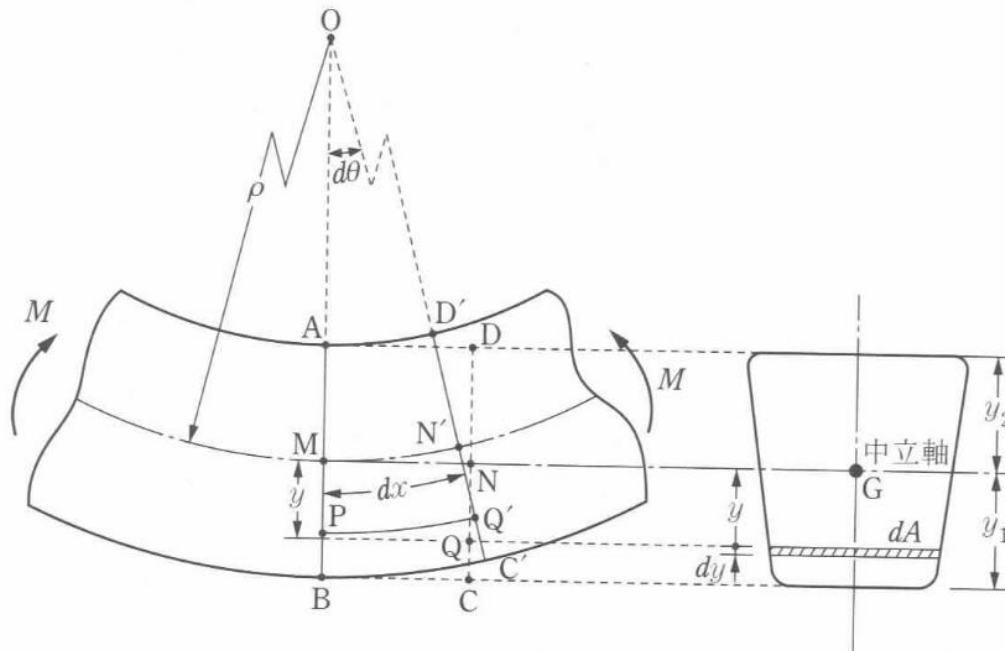
半径、角度と弧の長さの関係

- ラジアンを使うと、角度 $\times$ 半径が弧の長さとなる
 - 2π の中心角は円周の1周分の長さになる $\rightarrow$ 円周の長さ $2\pi R$



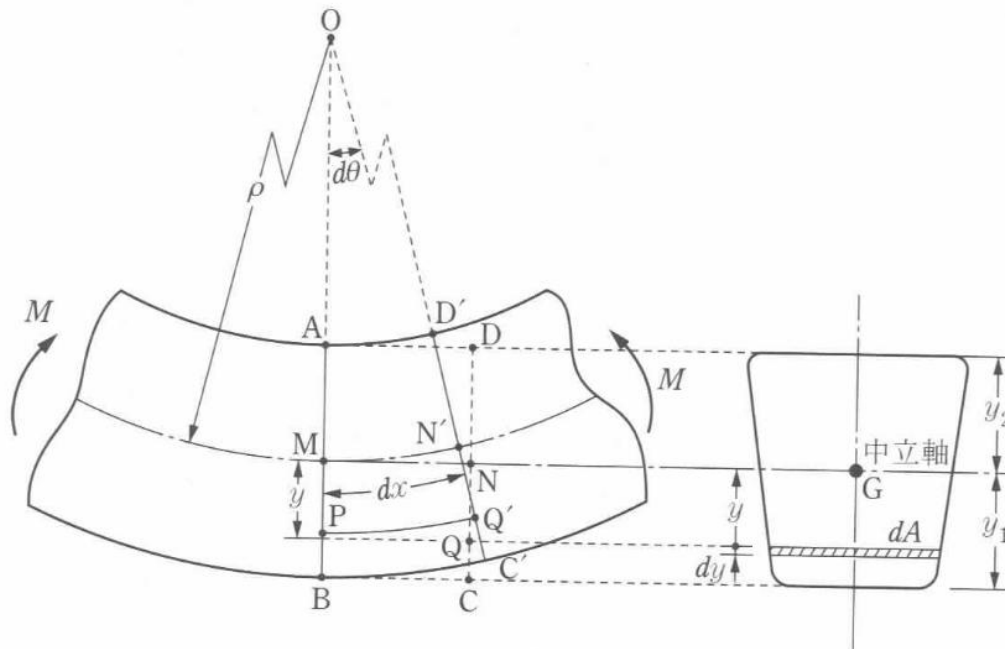
モーメントによるはりの変形

- 断面 A-B と C'-D' の延長線が点 O において角 $d\theta$ で交わるとすればはりのたわみ曲線の曲率半径 (radius of curvature) を ρ として、 $\rho d\theta = ds$ となる。



変形による移動

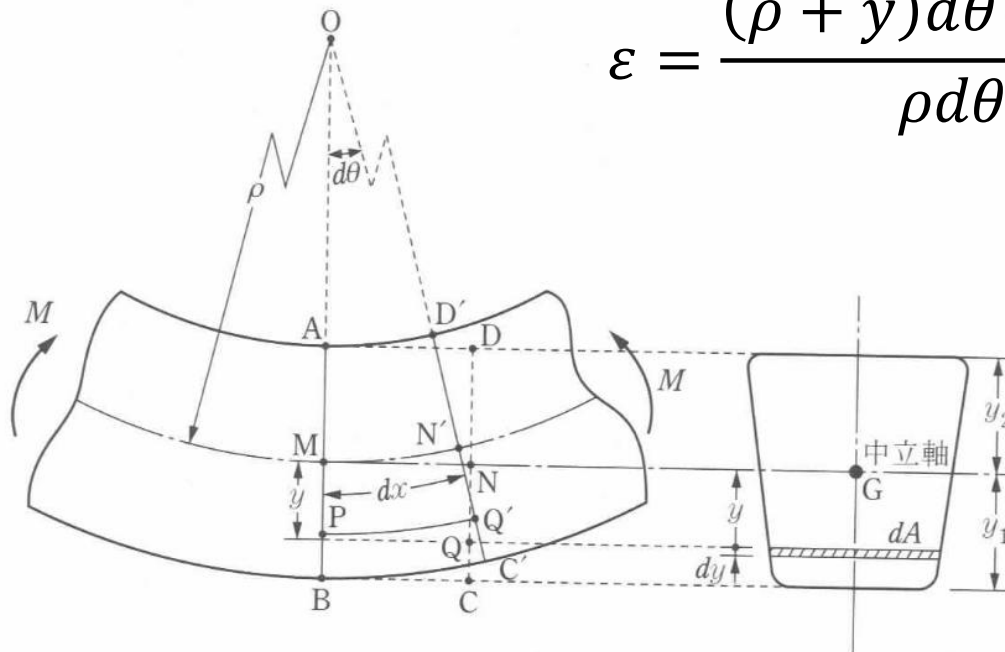
- 中立軸から y 離れたところに弧 $P'Q'$ を考えると、変形前に P, Q はそれぞれ dx だけ離れた2つの断面 $A-B$ と $C-D$ の上であって、変形後に弧になっている。



ひずみの式

- 変形前のPQが、変形後にP'Q'となった。
- PQの長さは $\rho d\theta$, P'Q'は $(\rho + y)d\theta$
- ひずみはもとの長さに対する伸びの割合

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$



ひずみと応力

- 弾性係数をEとする

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

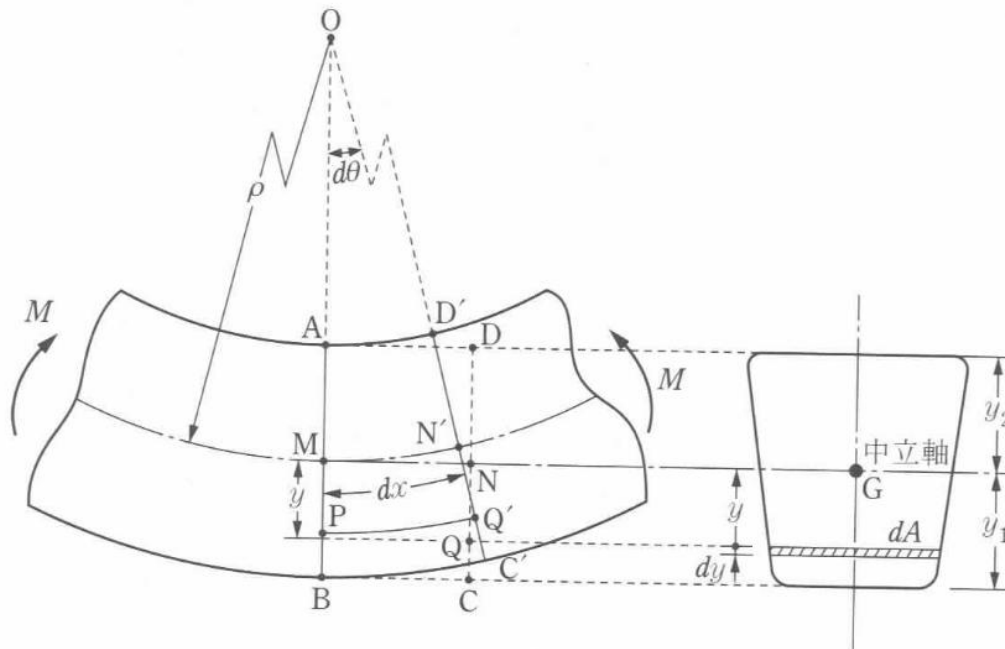
曲げ応力の式

- 応力は中立軸から距離 y に比例し、中立軸上 ($y=0$) で $\sigma=0$ となる。
- はりに生じるこの応力を曲げ応力 (Bending stress) という。

ひずみの式

- 断面の中の位置が違くと曲げ応力が違う

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$



例題6.1 曲げ応力の計算

- 直径3mmの鋼線を直径1mの円筒に巻きつけたとき、鋼線に生じる曲げ応力を求めよ。ただし、鋼線の縦弾性係数を $E = 206\text{GPa}$ とする。

例題6.1 解答例

- まっすぐなはりを曲率半径 $\rho=0.5\text{m}$ に曲げたとき、はりに生じる曲げ応力は応力の式によって求めることができる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{Ey}{\rho} \\ &= \frac{206 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-3}}{2}}{0.5} \\ &= 618 \times 10^6 = 618 \text{ MPa}\end{aligned}$$

例題6.2

- 厚さ 2mmの鋼帯を直径Dの円筒に巻き付けたい。鋼帯に生じる曲げ応力が、鋼帯の比例限度 $\sigma_p=200\text{MPa}$ を超えないようにするには、Dをいくらにすればよいか。鋼帯の縦弾性係数を $E=206\text{GPa}$ とする。

例題6.2 解答例

- 曲率半径 ρ と中立軸からの距離 y をそれぞれ次のようにする。

$$\rho = \frac{D \times 2 \times 10^{-3}}{2}$$

$$y = \frac{2 \times 10^{-3}}{2} = 1 \times 10^{-3}$$

- すると式より

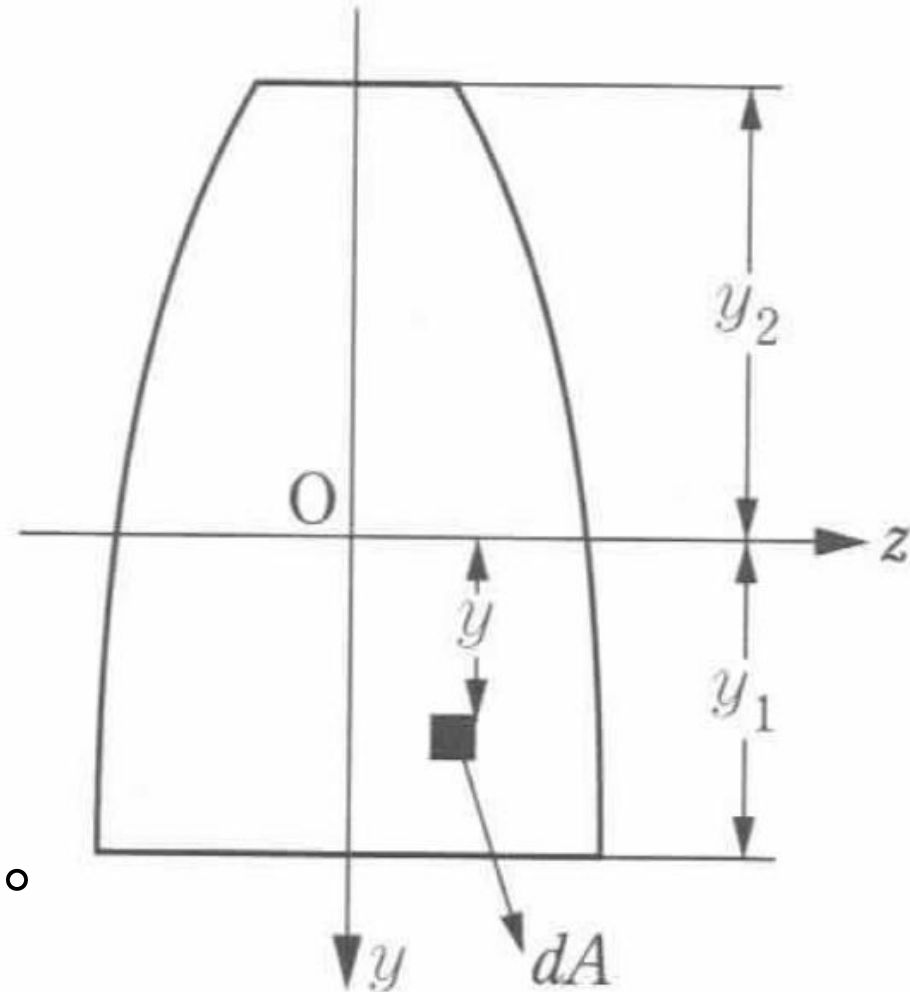
$$\rho = \frac{Ey}{\sigma_p} = \frac{206 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-3}}{200 \times 10^6} = 1.03 [m]$$

- したがって、

$$D = 2 \times 1.03 - 2 \times 10^{-3} = 2.058 [m]$$

6.2 曲げモーメントと曲げ応力

- はりには、軸線方向に外力は生じない(全体は位置がずれない)
- 図のように断面の中立軸(z 軸)から y 離れた微小面積 dA に作用する応力を σ とすると、この微小面積に生じる力は σdA となり、これを断面全体について積分した値は0となるはずである。



6.2 曲げモーメントと曲げ応力

- すなわち、

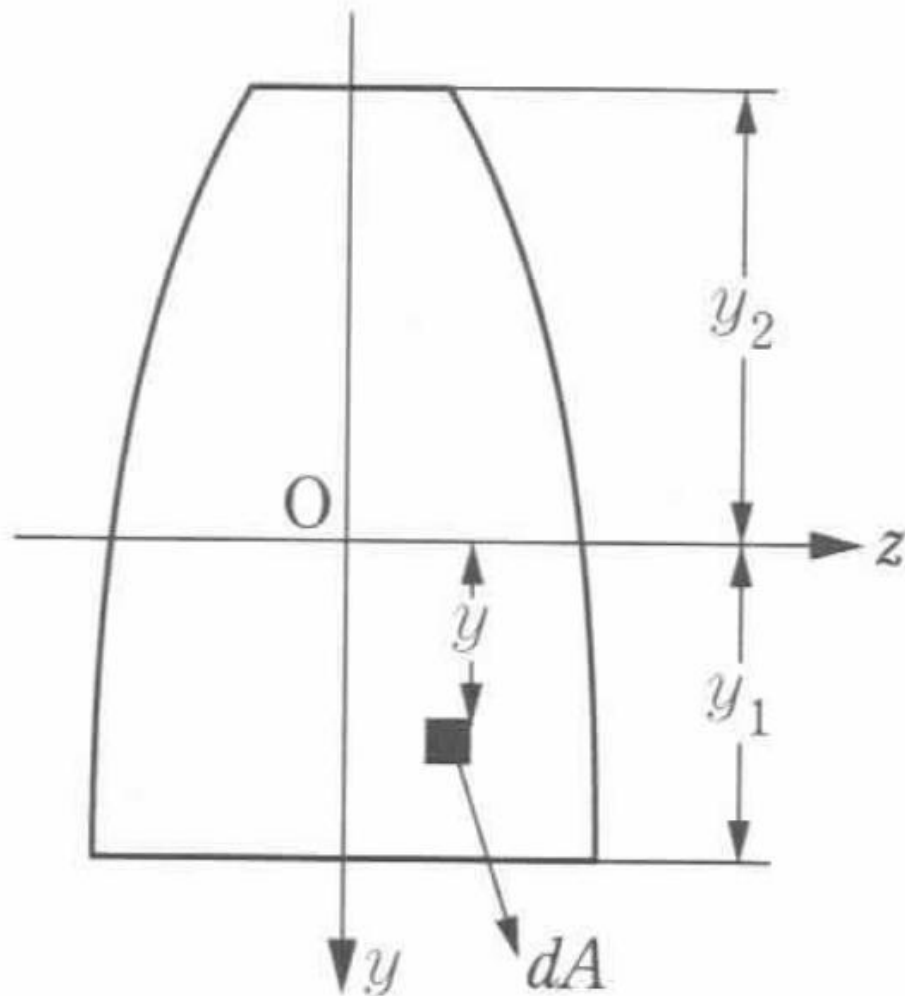
$$\int_A \sigma dA = 0$$

- また

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

なので、

$$\int_A \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$



6.2 曲げモーメントと曲げ応力

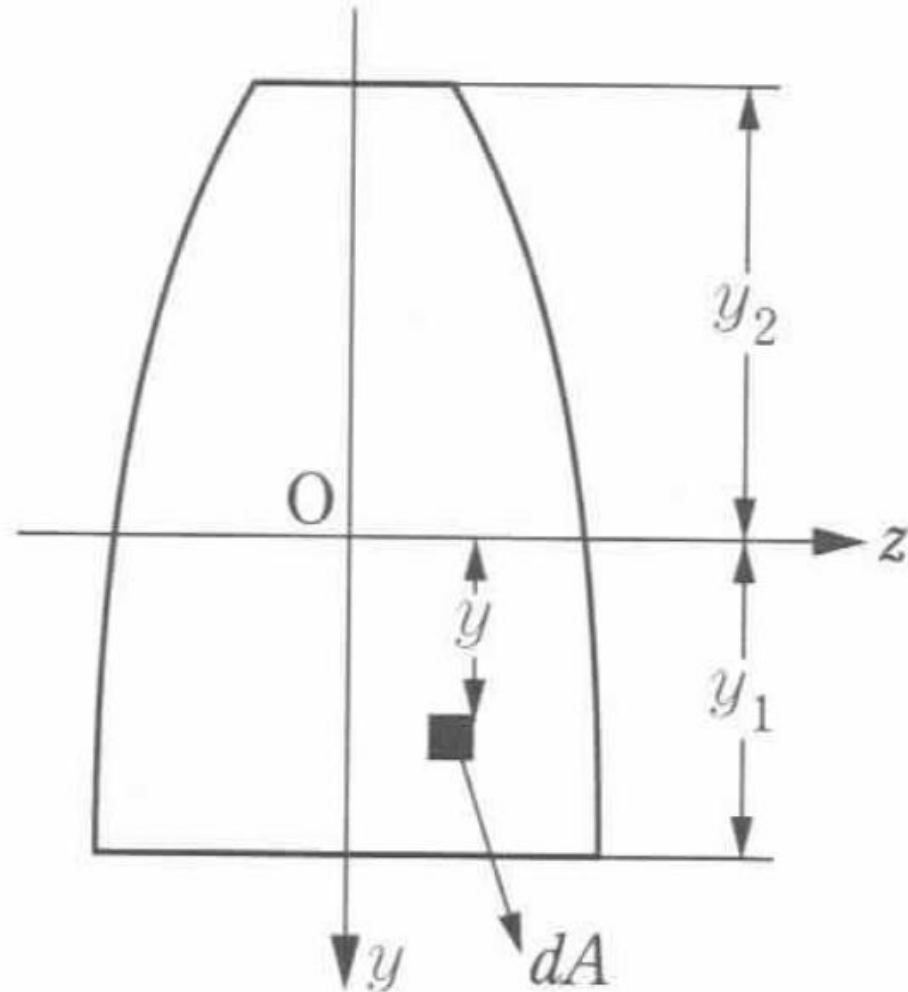
- ここで、 $\frac{E}{\rho} \neq 0$ なので、

$$\int_A y dA = 0$$

となる。断面の図心と z 軸との距離を y_c とし、断面積を A とすれば、

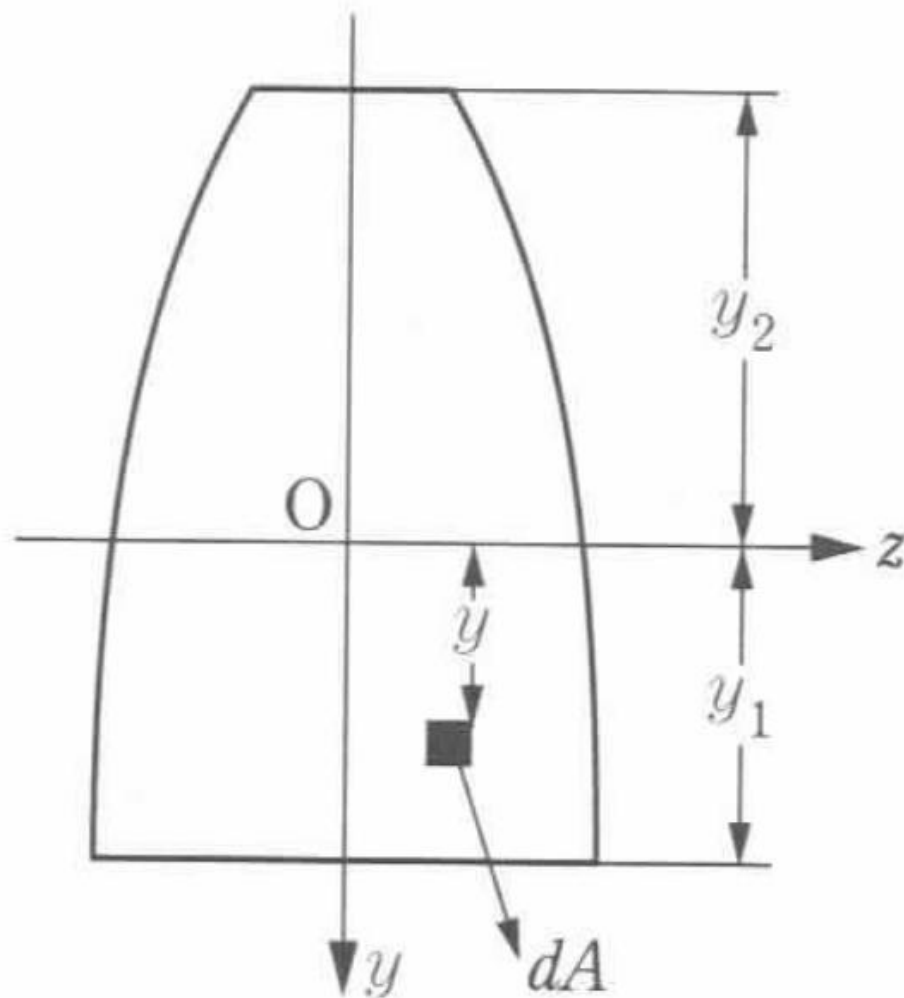
$$\int_A y dA = Ay_c = 0$$

となる。



6.2 曲げモーメントと曲げ応力

- ここで、 $A \neq 0$ であるので、 $y_c = 0$ となり、中立軸は断面の図心を通ることになる。



断面一次モーメント

- この中で、 $\int_A y dA$ という量は、微小面積 dA と中立軸（ oz 軸）から dA までの距離 y との積を断面全体に関して総和を求めたものである。
- これを断面 A の中立軸に関する断面一次モーメントという。

曲げモーメントと曲げ応力の関係

- 断面に作用する曲げモーメントを M とし、曲げ応力を σ とする。
- 同じように断面の中立軸から y 離れた微小面積 dA に作用する応力を σ とすると、この微小面積に生じる力は σdA となる。
- この力の中立軸まわりのモーメントを dM とすると、 $dM = y\sigma dA = \frac{Ey^2}{\rho} dA$ となる。

断面二次モーメント

- このモーメントの断面全体に関する総和は、曲げモーメントMとつりあっている必要がある

$$M = \int_A \frac{E y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI}{\rho}$$

- ここで、 $I = \int_A y^2 dA$ を中立軸に関する断面二次モーメント(慣性モーメント)という。

曲率の式

- この式を変形するとモーメントMと断面二次モーメントとの関係を得る。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

- この式は、はりの中立軸の曲率（はりのたわみ曲線）が曲げモーメントMに比例していること、材料の縦弾性係数Eと断面二次モーメントIの積に反比例していることを表している。

曲げ剛性

- 曲げモーメント M が同じでも EI の大きいはりほど曲がりにくくなる。この EI をはりの曲げ剛性 (flexural rigidity) という。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

曲げ応力

- 曲げ応力 σ

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}, \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

から、

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

となる。この式より、曲げモーメント M の働く断面における中立軸から y だけ離れた点の曲げ応力を求めることができる。

曲げ応力

- 曲げ応力 σ は、中立軸からの距離 Y に比例するので、中立軸からもっとも離れた点で最大の曲げ応力が生じる。
- 中立軸からはりの凸側(引っ張り側)および凹側(圧縮側)のもっとも離れた点までの距離をそれぞれ y_1 , y_2 とすると最大の引張応力 $\sigma_{t \max}$ と圧縮応力 $\sigma_{c \max}$ は、
- $\sigma_{t \max} = \frac{My_1}{I} = \frac{M}{Z_1}$, $\sigma_{c \max} = \frac{My_2}{I} = \frac{M}{Z_2}$ で表される。

断面係数

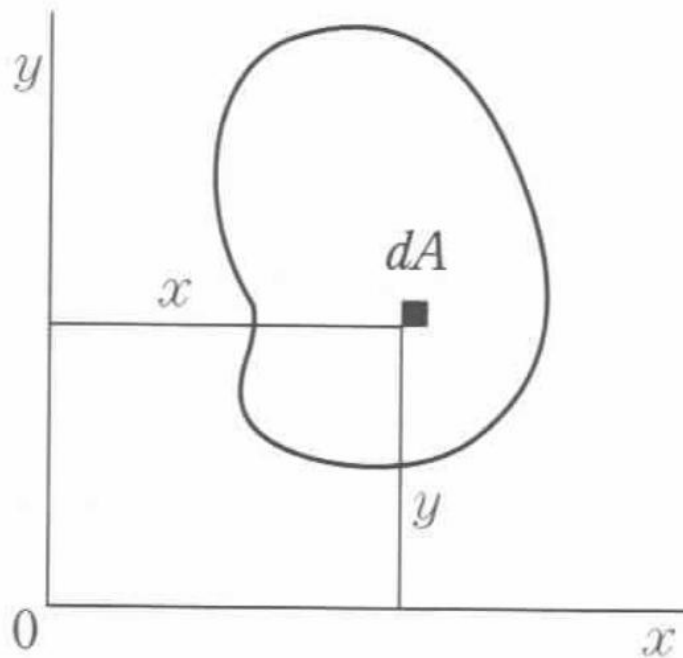
- $\sigma_{t \max} = \frac{My_1}{I} = \frac{M}{Z_1}$, $\sigma_{c \max} = \frac{My_2}{I} = \frac{M}{Z_2}$ で表される
として、

$$\frac{I}{y_1} = Z_1, \frac{I}{y_2} = Z_2$$

とおいている。この Z_1, Z_2 を断面係数 (modulus of section)という。断面係数は、はりの断面形状により決まる値で、断面が上下対称であれば、 $y_1 = y_2$ であり、 $Z_1 = Z_2$ である。

6.3 図心と断面一次モーメント

- 図の中の微小面でき dA について、その位置が (x, y) であるとする、 $y dA$ は x 軸に関する面積モーメント(moment of area)である。



断面一次モーメント

- 面積モーメントを図形全体に関して総和をとったものを次のように計算する。

$$S_x = \int_A y dA$$

この S_x をx軸に関する断面一次モーメント (geometrical moment of area) という。同様にy軸に関する断面一次モーメントは次のようになる。

$$S_y = \int_A x dA$$

図心

- ある図形の面積 A が一点に集中したと仮定し、このときの任意の軸に関する面積モーメントが、この図形の同じ軸に関する断面一次モーメントと等しくなる点 $G(x_c, y_c)$ を、その図形の図心(centroid, center of figure) という。

図心の式

- 図心の式は、 $Ay_c = \int_A ydA$ から、

$$y_c = \frac{\int_A ydA}{A}$$

同様に、

$$x_c = \frac{\int_A xdA}{A}$$

図心は軸に無関係

- 図心の位置は、図の形によって決まるので、軸の位置とは無関係である。
- 図心を通る軸に関する断面一次モーメントは0である。

対称図形

- 図形が対称軸をもつとき、そのをx軸またはy軸とすれば、 $\frac{\int_A y dA}{A}$ あるいは $\frac{\int_A x dA}{A}$ は0となるので、図心は対称軸上にある。したがって、対称軸が2本以上ある図形では、対称軸の交点が図心となる。
- (円・楕円、長方形、正方形、正三角形、ひし形など)

図形の図心の計算

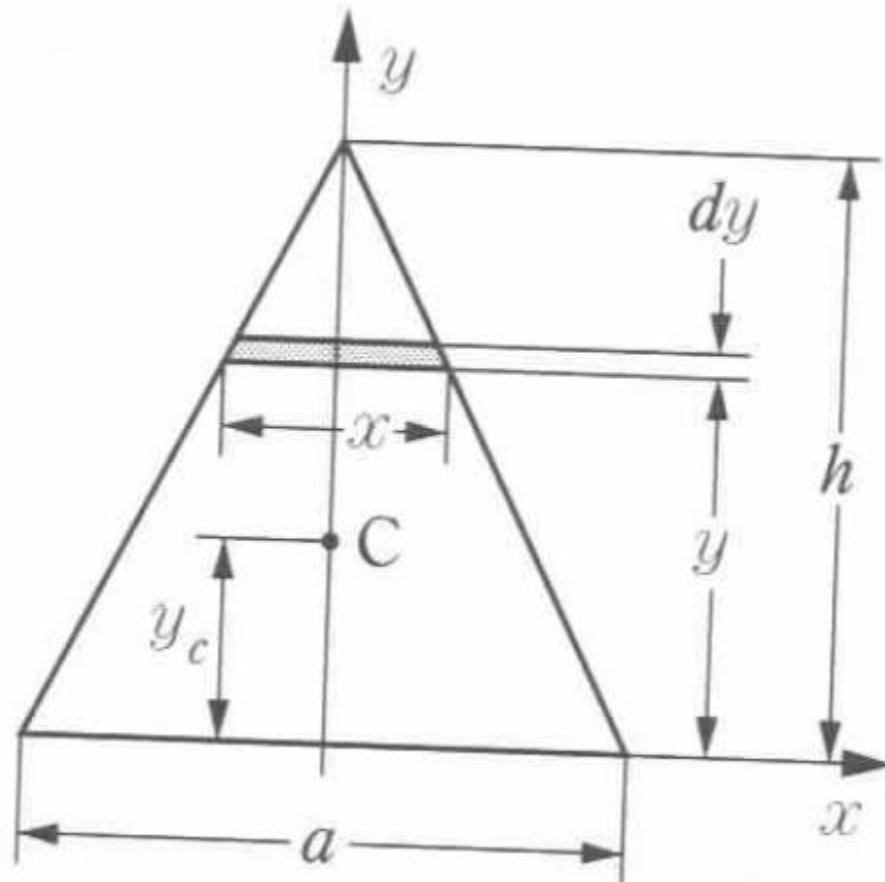
- 図形の図心を求める場合、その図形を図心および面積があらかじめわかっている n 個の図形に分割可能であれば、分割された個々の図形における図心の座標を $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 、面積を $A_1, A_2, \dots, A_n$ として、

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$
$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}$$

で計算できる。

例題6.4

- 図に示す図形の図心を求めよ。



解答

- 図心の計算 (図心は対称軸であるy軸上にある) はy座標だけ求めればよい。

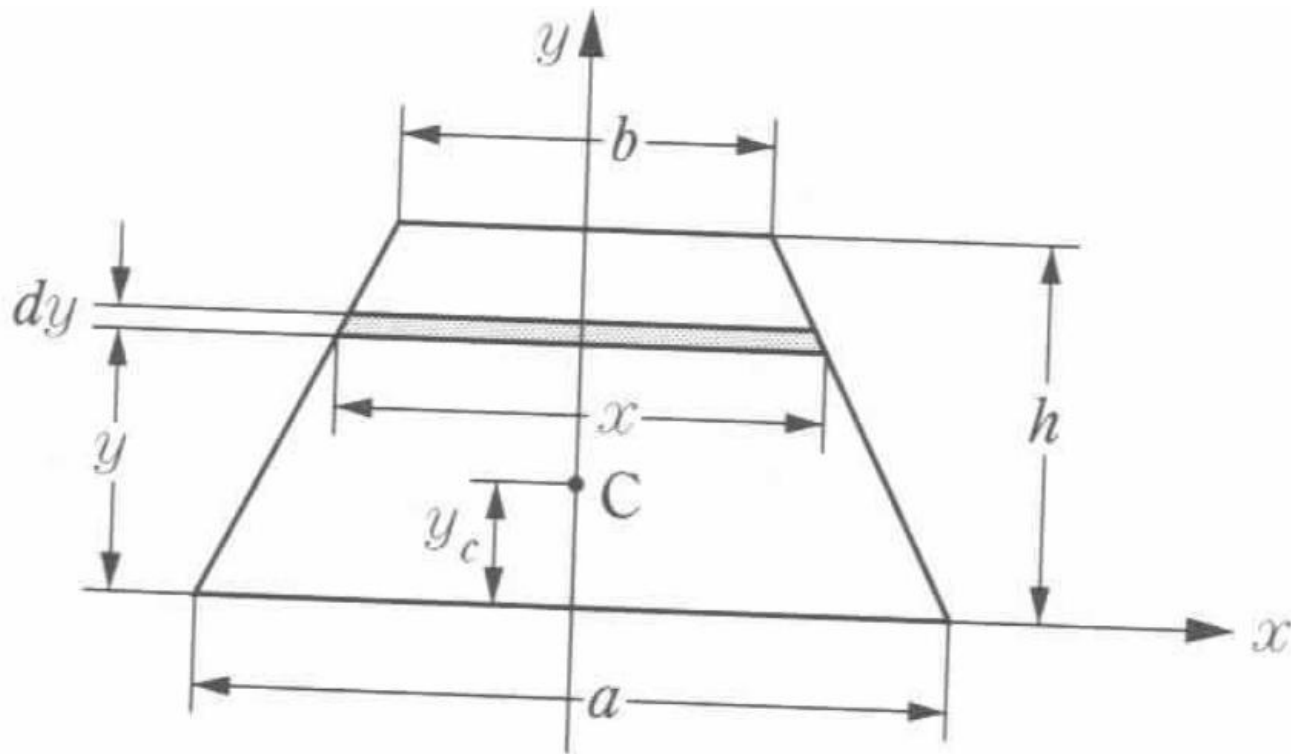
$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_A y x dy$$

ここで、 $x = a\{1 - (y/h)\}$, $A = ah/2$ となり、

$$y_c = \int_0^h \frac{ya\left(1-\frac{y}{h}\right)}{ah/2} dy = \frac{2}{h} \int_0^h \left(y - \frac{y^2}{h}\right) dy = \frac{h}{3}$$

例題6.5

- 図に示す図形の図心を求めよ。



【解答】 底辺を x 軸，対称軸を y 軸と定めると， $a > b$ として

$$x = a - \frac{y(a-b)}{h}, \quad A = \frac{(a+b)h}{2}$$

であるので

$$\int_A y dA = \int_0^h y x dy = \int_0^h y \left\{ a - \frac{y(a-b)}{h} \right\} dy = \frac{(a+2b)h^2}{6}$$

となり

$$y_c = \frac{(a+2b)h^2/6}{(a+b)h/2} = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$$

が得られる。

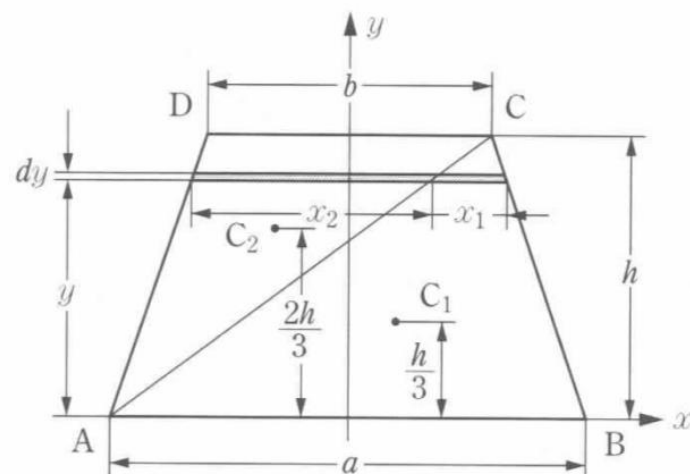
ここで，式 (6.8) を用いて同じ解を求めてみる。図 6.8 において対角線 AC を結び，任意の位置 y における台形の幅 x を対角線との交点で x_1 ， x_2 に分割すると， y の位置における微小面積 dA は

$$dA = x dy = (x_1 + x_2) dy = x_1 dy + x_2 dy$$

となり

$$\int_A y dA = \int_0^h y x_1 dy + \int_0^h y x_2 dy$$

となる。



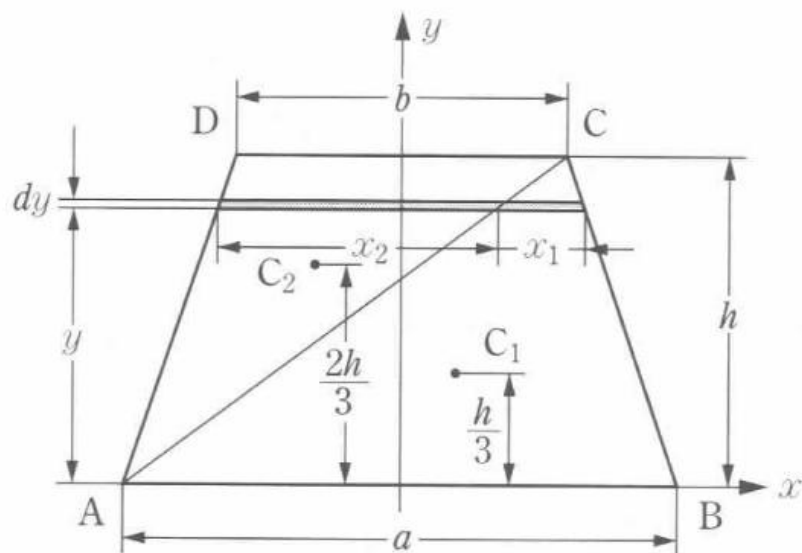


図 6.8

ここで、対角線で仕切られた二つの三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の図心の y 座標をそれぞれ y_1 , y_2 とし、面積を A_1 , A_2 とすると、式 (6.6) より

$$\int_0^h yx_1 dy = y_1 A_1, \quad \int_0^h yx_2 dy = y_2 A_2$$

$A = A_1 + A_2$ であるので

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

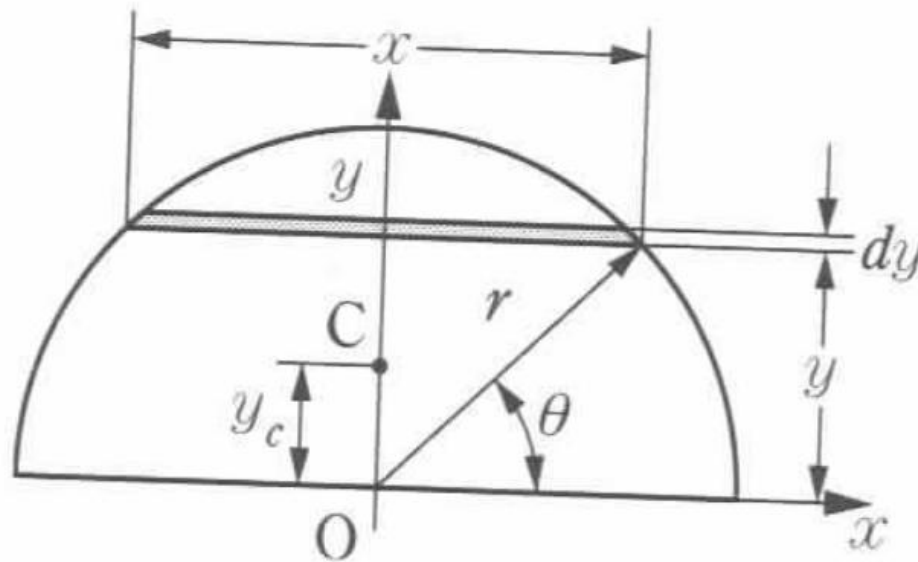
ここで、 $y_1 = h/3$, $y_2 = 2h/3$, $A_1 = ah/2$, $A_2 = bh/2$ を代入すれば

$$y_c = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$$

となる。

例題6.6

- 図に示す図形の図心を求めよ。



解答

- 図心の計算 (図心は対称軸である y 軸上にある) は y 座標だけ求めればよい。

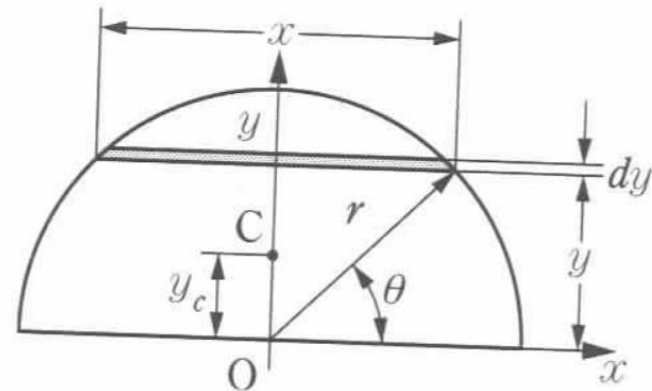
【解答】 座標軸を図のように定めると、図心は y 軸上にあるので

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_0^{\pi/2} y x dy$$

ここで、 $x = 2r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $dy = r \cos \theta d\theta$, $A = \pi r^2 / 2$ であるから

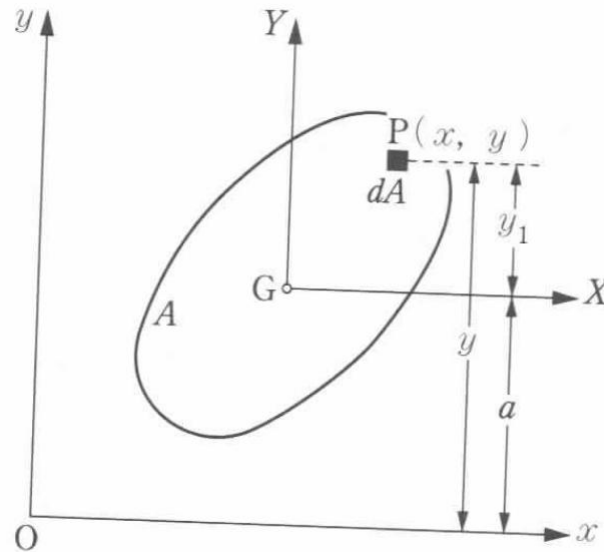
$$y_c = \int_0^{\pi/2} \frac{2r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\pi r^2 / 2} d\theta = \frac{2r^3 / 3}{\pi r^2 / 2} = \frac{4r}{3\pi}$$

となる。



6.4 断面二次モーメント

- 任意の図形上の微小面積 dA について、その座標を (x, y) とすると、図に示すように、 dA の x 軸に関する断面二次モーメントは $y^2 dA$ である。



断面二次モーメント

- 図形全体について $y^2 dA$ を総和したもの

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

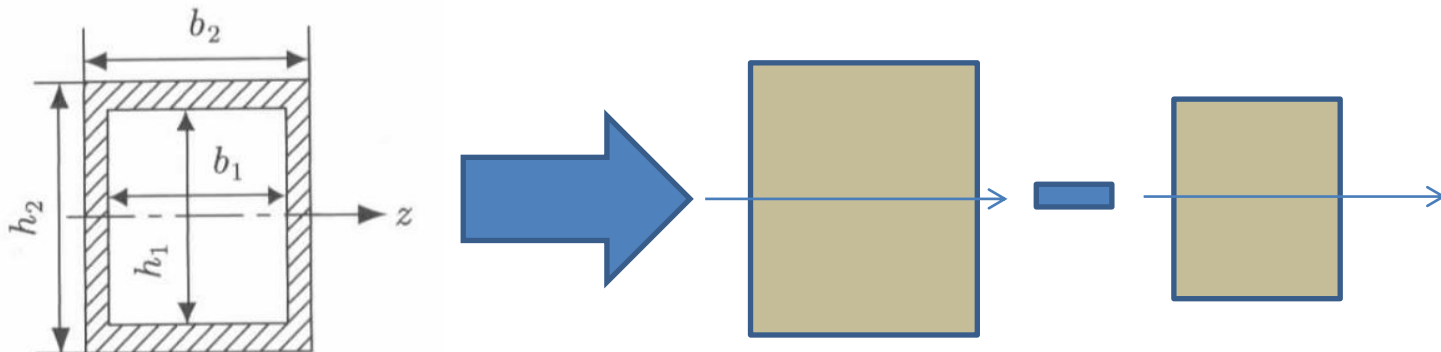
とする。この I_x をx軸に関する断面二次モーメント (moment of inertia of area) という。Y軸に関してもつぎのように計算できる。

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

複雑な断面の断面二次モーメント

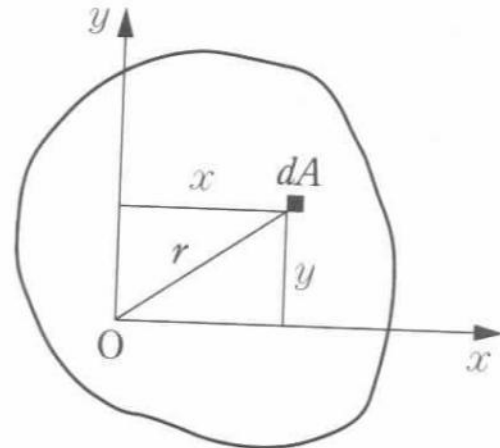
- 複雑な断面の断面二次モーメントを知りたい場合、単純な断面の断面二次モーメントの加算と減算で求めることができる。
- ただし、単純な各断面の z 軸が、元の複雑な断面の z 軸と一致している場合に限る。



極断面二次モーメント

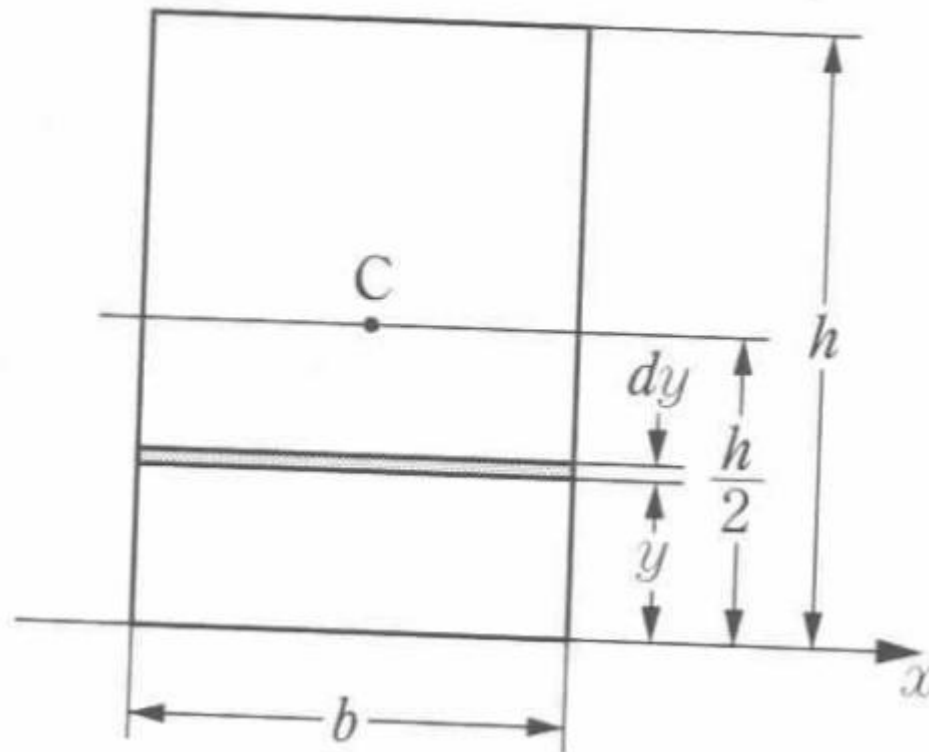
- 座標の原点を通り、 x 、 y 軸に直交する軸に関する断面二次モーメントを極断面二次モーメント (polar moment of inertia of area) I_p という。
 - 軸のねじりに対して用いられる

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$



例題6.7

- 図の長方形の断面二次モーメントを求めよ。



【解答】 x 軸を図のように長方形の一边と一致するように定めると、 x 軸に関する断面二次モーメント I_x は

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

となる。一方、 x 軸に平行で図心を通る軸に関する断面二次モーメント I は、式 (6.11) より

$$I_x = a^2 A + I = \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh + I$$

したがって

$$I = I_x - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

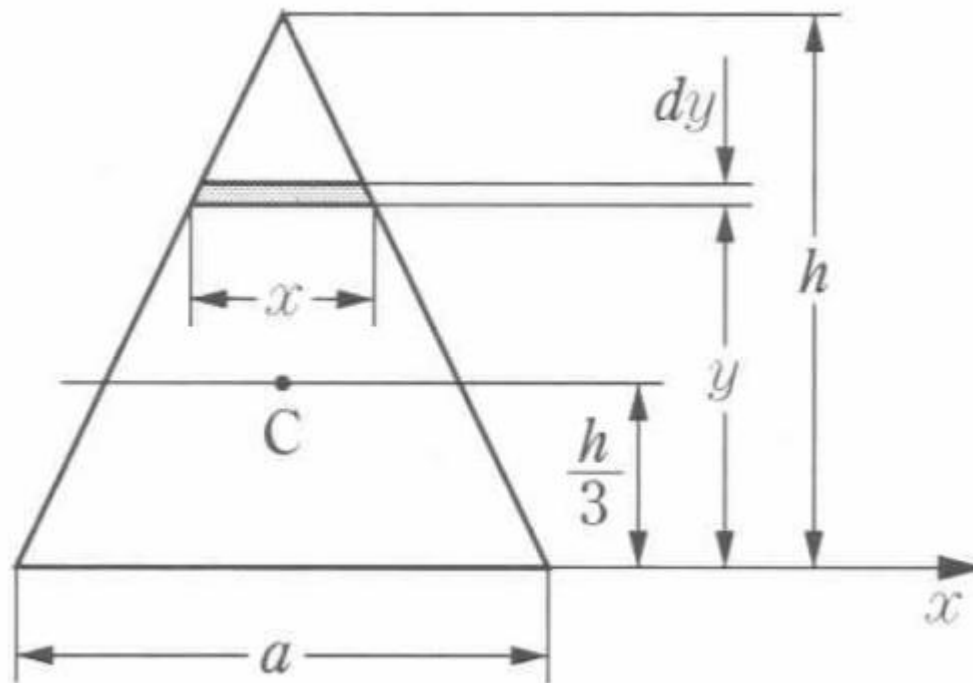
が得られる。このとき長方形の断面係数 Z は

$$Z = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

である。

例題6.8

- 図の三角形の断面二次モーメントを求めよ。



【解答】 x 軸を図のように三角形の底辺と一致するように定めると、 x 軸に関する断面二次モーメント I_x は

$$I_x = \int_0^h y^2 x dy = \int_0^h y^2 a \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{ah^3}{12}$$

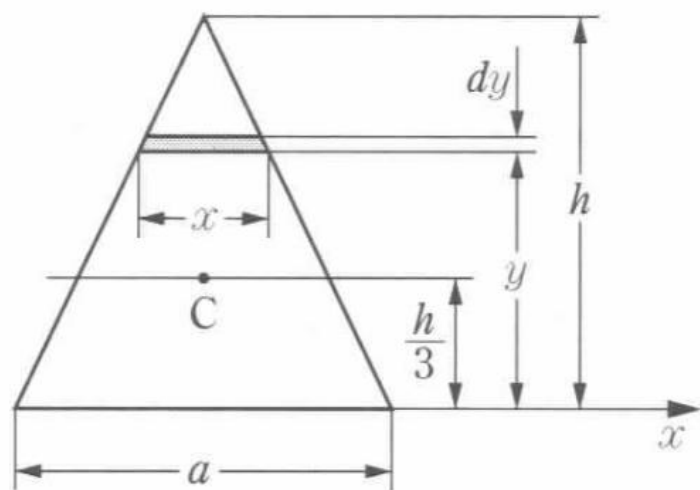
となる。ここで、 $x = a\{1 - (y/h)\}$ である。一方、図心を通り x 軸に平行な軸に関する断面二次モーメント I は、式 (6.11) より

$$I_x = \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{ah}{2} + I \quad \text{となり} \quad I = \frac{ah^3}{12} - \frac{ah^3}{18} = \frac{ah^3}{36}$$

となる。このとき三角形の断面係数 Z は、図心から底辺および頂点までの距離によってそれぞれ

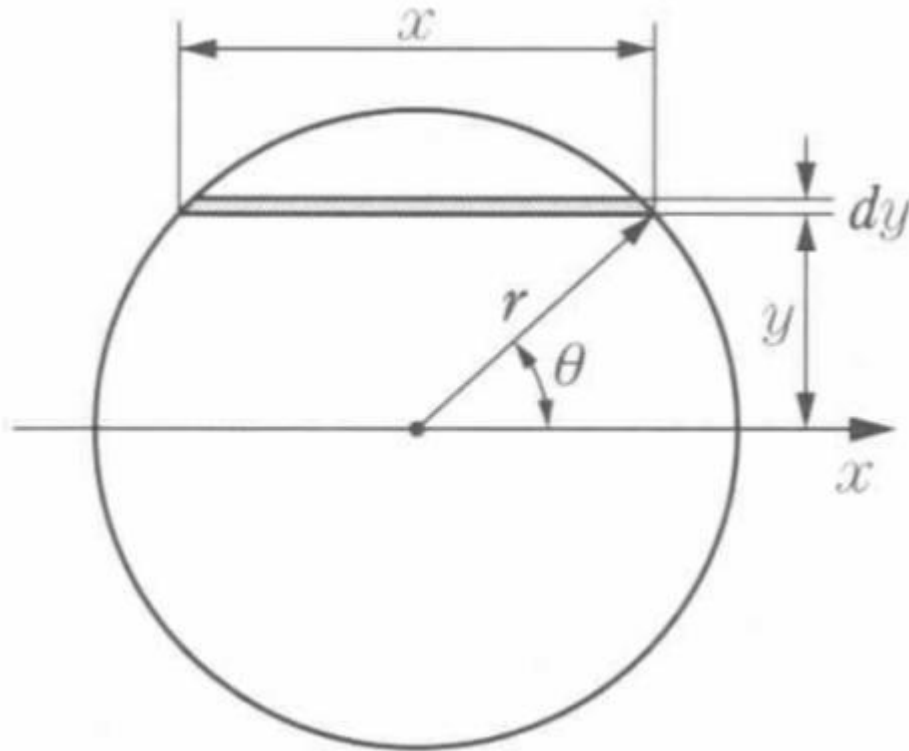
$$Z_1 = \frac{ah^3/36}{h/3} = \frac{ah^2}{12}, \quad Z_2 = \frac{ah^3/36}{2h/3} = \frac{ah^2}{24}$$

と表される。



例題6.9

- 図の円の断面二次モーメントを求めよ。



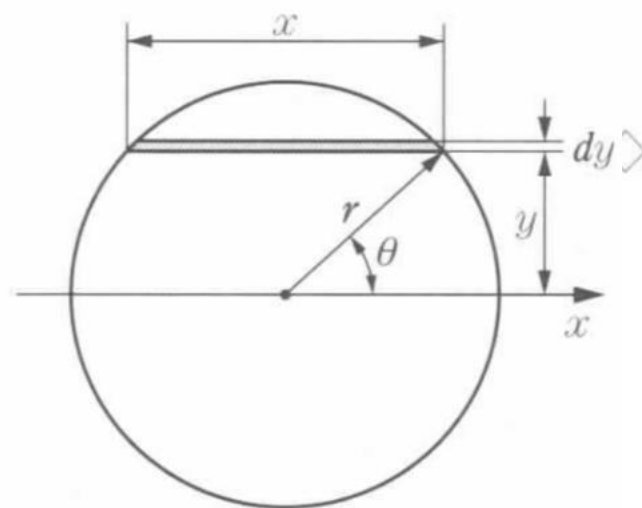
【解答】 x 軸を円の中心を通るように定めると、図より $x=2r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$, $dy=r \cos \theta d\theta$ であるから、 x 軸に関する断面二次モーメント I は

$$\begin{aligned} I &= \int_{-r}^r y^2 x dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \sin \theta)^2 2r \cos \theta r \cos \theta d\theta = 2r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \end{aligned}$$

となる。ここで、 d は直径である。このとき円の断面係数 Z は

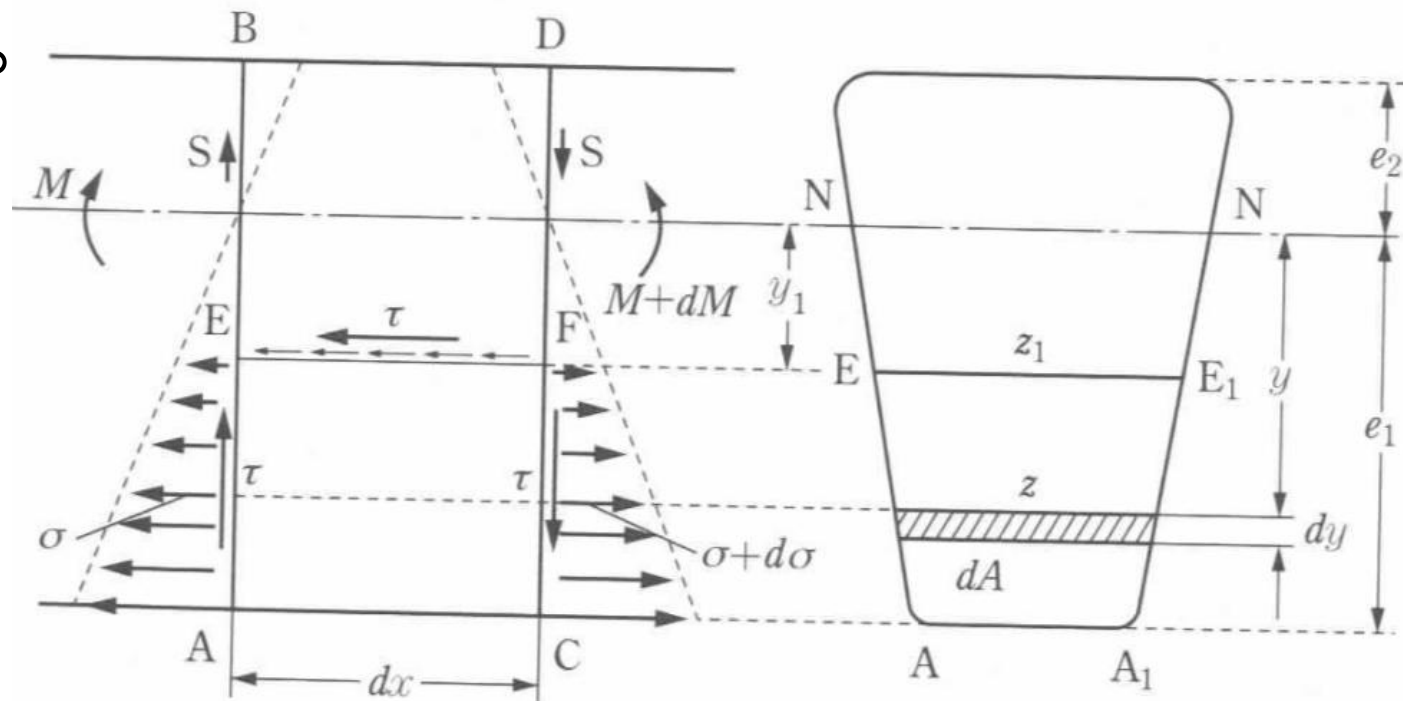
$$Z = \frac{\pi d^4 / 64}{d / 2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

である。



6.5 はりのせん断応力

- はりには曲げモーメントとともにせん断力も作用している。図に示すように微小距離 dx だけ離れた2つの断面A-B, C-D上では、面に作用するせん断力 S に基づいてせん断応力 τ を生じている。



せん断応力

- 中立面N-Nから距離 y_1 のところに点E, Fに作用している共役せん断応力 τ は、この面E=F上において一様に分布しているとする。

