基礎電磁気学Ｉのまとめ

松浦　秀治

電界の強さ

電荷１C

電界

１C の電荷が受ける電気力の大きさ F が電界の強さ E に対応する。　$F=1\times E$

単位　V/m　（注：高校時代の単位と異なることに注意）

電気力

電界の強さの計算に使う定理、法則、定義

点電荷の場合	電荷が分布している場合
↓	↓
クーロンの法則	ガウスの定理と電気力線の定義

電気力

電荷［C］

$$F=QE \qquad [\mathrm{N}]$$

電界　[V/m]

電位

１C の電荷を無限遠からその点（A 点）まで運ぶのに必要な仕事が電位に対応する。

単位　V

A 点まで

１C の電荷

$$V=\int_{\infty}^{a} 1\times E\times\left(-\mathrm{d}r\right)=-\int_{\infty}^{a} E\mathrm{d}r \qquad [\mathrm{V}]$$

無限遠から

電界

微小距離
r=∞から r=a まで r の減少する方向に積分するため、
－が付いている。

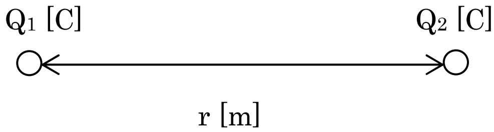
注：　**仕事の定義**　　力×（力の方向に移動した距離）

力について：　１C の電荷に働く電気力は $1\times E$ ［N］である。

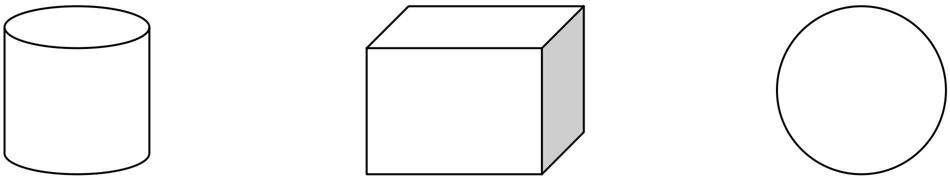
距離について：dr は、電界の強さが変わらない非常に短い距離を表している。

クーロンの法則（点電荷の場合）

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_s r^2} \quad [\mathrm{N}]$$



ガウスの定理（電荷が分布する場合）



円筒　　直方体　　球

上記のような任意の箱（閉曲面）を考える。

箱の中に、電荷が Q [C]入っている場合、この箱から出てくる電気力線の本数は

$$\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_s} \quad [本]$$

である。

電気力線の定義

電荷E [V/m]の場所で、電気力線に対して垂直な面積がS [m²]のとき、この面積を通過する電気力線の本数は

$$ES \quad [本]$$

である。

ガウスの定理と電気力線の定義を用いて電界の強さを計算するときの閉曲面の形状

帯電体の形状		閉曲面の形状	用いる面積（電界が一定の面）
球	→	球	球の表面積
円筒（円柱）	→	円筒	円筒の側面積
平面	→	筒	筒の底面積

完全導体

性質

1．完全導体の内部は、電界がゼロである。

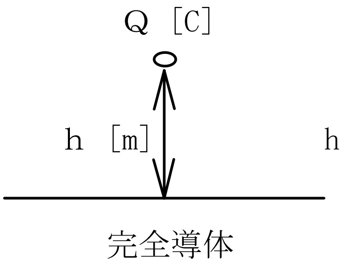
2．完全導体の内部には、静電荷が存在しない。

3．完全導体に電荷Q［C]を持つ帯電体を近づけると、帯電体に近い完全導体表面に$-Q$［C]が誘導され、反対側の完全導体表面にQ［C]が現れる。

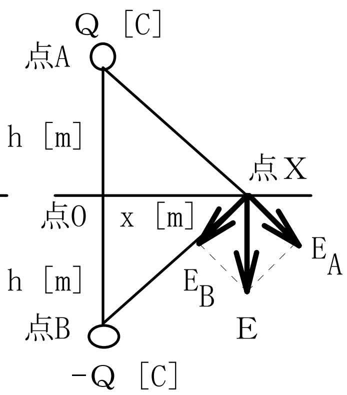
4．完全導体の表面にσ［C/m²]の電荷が一様に分布しているとき、完全導体表面の電界は表面に垂直であり、強さはσ/ε［V/m]である。

電気影像法

例　下図に示すように完全導体の上空ｈ［m]の所に点電荷Ｑ［C]を置いたとき、完全導体表面の点Ｘでの電荷密度σを、右図のように電気影像法を用いて求める。記号π、ε、ｈ、ｘ、Ｑを用いて答えること。単位も書くこと。ただし、Ｑ＞０である。



電気影像法



$$\overline{AX}=\overline{BX}=\sqrt{h^2+x^2}$$

$$\cos(\angle 0AX)=\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}}$$

図１　　　　　　　　　　図２

電気影像法とは、図1の完全導体より上での電界（または電気力線）と全く同じ状態を、完全導体を取り除いて実現する方法である。

このとき、完全導体の性質４を利用する。

考え方（図２）

1．完全導体を取り除く。

2．完全導体表面の位置に対して反対側で距離h［m]のところに電荷$-Q$［C]を置く。(ちょうど、完全導体表面が鏡のような感じで、鏡に映った点Aはちょうど点Bであり、電荷が正負反対(鏡では左右反対)となっている。

3．2つの電荷を用いて、クーロンの法則から点Xでの電界を求め、最後にσを求める。

静電容量

$$Q = CV$$

C は比例定数であり、これを静電容量と呼ぶ。

静電容量の計算

1. 一方の導体に+Q [C]、他方の導体に−Q [C]を与える。
2. ガウスの定理から閉曲面を貫く電気力線の本数を計算する。
3. 電気力線の定義から、電界を E [V/m]として、電気力線の本数を計算する。
4. ガウスの定理および電気力線の定義から求められた電気力線の本数は等しいことを用いて、電界の強さ E [V/m]を求める。
5. 1 C の点電荷を、−Q [C]の電荷が帯電している導体から、+Q [C]の電荷が帯電している導体まで動かすのに必要な仕事（つまり、電位差）を、積分を用いて求める。
6. 静電容量の定義より、静電容量 C [F]を求める。

微分方程式

ラプラス方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

ポアソン方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_s}$$

1. 両辺を積分し、左辺を $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ にする。このとき、積分定数C_1を右辺に付け加える。

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} x + C_1$$

2. もう一度積分し、左辺をVにする。このとき、積分定数C_2を右辺に付け加える。

$$V = C_1 x + C_2$$

$$V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0 \varepsilon_s} x^2 + C_1 x + C_2$$

3. 2 つの境界条件を用いて、C_1とC_2を求める。
   境界条件の例：　1.　$x = 0$ のとき、$V = 0$ 。
   　　　　　　　　2.　$x = d$ のとき、$V = V_1$。

電流の定義

ある断面を 1 秒間に電荷が 1 C 通過したとき、1 A と定義する。

微分と積分との関係

$$\begin{tikzcd} \text{定数}\,C \arrow[d, shift right=3, "\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}"'] \\ 0 \arrow[u, shift right=3, "\int 0\mathrm{d}x"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[d, shift right=3, "\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}"'] \\ 1 \arrow[u, shift right=3, "\int 1\mathrm{d}x"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x^2 \arrow[d, shift right=3, "\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x}"'] \\ 2x \arrow[u, shift right=3, "\int 2x\mathrm{d}x"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \frac{1}{x} \arrow[d, shift right=3, "\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x}"'] \\ -\frac{1}{x^2} \arrow[u, shift right=3, "\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ln x \arrow[d, shift right=3, "\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x}"'] \\ \frac{1}{x} \arrow[u, shift right=3, "\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x"'] \end{tikzcd}$$

２階微分の表し方

関数　$f(x)$

１階微分　$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

２階微分　$f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$　　注: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x)$

電気・電子工学での対数の表現方法

	電子	数学・物理
自然対数	$\ln x$	$= \log_e x$
常用対数	$\log x$	$= \log_{10} x$

電位と電界

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \quad \underset{\boxed{\text{電界を積分}}}{\overset{\boxed{\text{電位を微分}}}{\leftrightarrows}} \quad V=-\int_{\infty}^{a}E\mathrm{d}r$$

$E=-\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$ の意味

点 A での電位がV_{A}で、点 B での電位がV_{B}であり、電界が場所に対して一定の場合、電界は電位の傾きの負記号で定義されるから、

$$E=-\frac{V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}}}{r_{\mathrm{B}}-r_{\mathrm{A}}}=-\frac{\Delta V}{\Delta r}$$

となる。

一般的には、電界は場所に対して一定でないから、距離Δrの代わりに、電界が一定と考えられる微小距離$\mathrm{d}r$を考え、このときの電位の微小変化を$\mathrm{d}V$とおくと、

$$E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

となる。(物理ではよくこのような微小距離、微小変化を用いるので、慣れてください。)

このことより、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

は、変数rで変化する関数Vの接線の傾きを意味する。

注:　微分に関するいろいろな表わし方

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V(r)=V'(r)$$